Ciąg Smarandache-Pascala

Beata Zejfert

14 stycznia 2015

Zdefiniowanie Ciągu

Dla dowolnego ciągu b_n definiujemy ciąg T_n jako

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot b_{k+1}$$

dla każdego $n \geq 2$.

Twierdzenie

Niech X_n *będzie ciągiem, gdzie* $X_0 = u$, $X_1 = v$,
$X_{n+1} = aX_n + bX_{n-1}$ *dla każdego* $a^2 + 4b > 0$*. Dla każdej liczby całkowitej* $d \geq 2$ *definiujemy ciąg Smarandache-Pascala jako*

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot X_{dk+1}$$

Wtedy mamy następującą formułę

$$T_{n+1} = (2 + A_d + b \cdot A_{d-2}) \cdot T_n - \left(1 + A_d + b \cdot A_{d-2} + (-b)^d\right) \cdot T_{n-1} \tag{1}$$

gdzie ciąg A_n *definiujemy jako* $A_0 = 1$, $A_1 = a$,
$A_{n+1} = a \cdot A_n + b \cdot A_{n-1}$ *dla każdego* $n \geq 1$.

Ciąg A_n możemy też zdefiniować jako:

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} \left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^{n+1} \right) \tag{2}$$

Przy dowodzie twierdzenia korzystamy z Lematu:

Lemat

Niech $m \geq 0$ *i* $n \geq 3$. *Jeśli ciąg* X_n *spełnia warunek:*
$X_{n+3} = a \cdot X_{n+2} + b \cdot X_{n+1} + c \cdot X_n, n \geq 0$ *wtedy mamy tożsamość:*

$$X_{m+n} = A_{n-1} \cdot X_{m+1} + b \cdot A_{n-2} \cdot X_m,$$

gdzie ciąg A_n *definiujemy jako* $A_0 = 1$, $A_1 = a$,
$A_{n+1} = a \cdot A_n + b \cdot A_{n-1}$ *dla każdego* $n \geq 1$ *lub*

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} \left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Wniosek

Weźmy $b = 1$. Wtedy z (1) powstaje:

$$T_{n+1} = (2 + A_d + A_{d-2}) \cdot T_n - \left(1 + A_d + A_{d-2} + (-1)^d\right) \cdot T_{n-1}$$

Jeśli d jest liczbą parzystą otrzymujemy następujący wzór

$$T_{n+1} = (2 + A_d + A_{d-2}) \cdot (T_n - T_{n-1})$$

Wtedy wzór z (2) wygląda następująco:

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \left(\left(\frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} \right)^{n+1} \right) \tag{3}$$

Przykład

Zauważmy, że gdy $a = 1$ wzór z (3) przypomina wzór Eulera-Bineta:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

gdzie F_n to ciąg Fibonacciego. Wtedy $A_n = F_{n+1}$

n	F_n	$A_n + A_{n-2} + 2$
1	1	
2	1	5
3	2	
4	3	9
5	5	
6	8	20
7	13	
8	21	49
9	34	
10	55	125
11	89	
12	144	324
13	233	
14	377	845
15	610	
16	987	2209
17	1597	
18	2584	5780

Zauważmy, że w (3) możemy zastosować dwumian Newtona:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Wtedy

$$A_n =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \left(\frac{\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} \sqrt{a^2+4}^{\,i}}{2^{n+1}} - \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} \sqrt{a^2+4}^{\,i} (-1)^i}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} \sqrt{a^2+4}^{\,i} \left(1-(-1)^i\right)}{2^{n+1}}$$

Zauważmy, ze gdy i jest liczbą parzystą to $\left(1-(-1)^i\right)=0$, a gdy nieparzystą $\left(1-(-1)^i\right)=2$. Ostatecznie

$$A_d=\frac{2\sum\limits_{2i+1}^{\frac{d}{2}}\binom{d+1}{2i+1}a^{d+1-2i-1}\sqrt{a^2+4}^{2i+1-1}}{2^{d+1}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{2i+1=0}^{\frac{d}{2}}\binom{d+1}{2i+1}a^{d-2i}\left(a^2+4\right)^i}{2^d}$$

Niech $A_d = A_d(a)$. Wtedy

$$A_d(2) = \frac{\sum_{2i+1=0}^{\frac{d}{2}} \binom{d+1}{2i+1} 2^{d-2i} (8)^i}{2^d} = \sum_{2i+1=0}^{\frac{d}{2}} \binom{d+1}{2i+1} 2^i$$

$$A_d(3) = \frac{\sum_{2i+1=0}^{\frac{d}{2}} \binom{d+1}{2i+1} 3^{d-2i} (13)^i}{2^d}$$

$$A_d(4) = \frac{\sum_{2i+1=0}^{\frac{d}{2}} \binom{d+1}{2i+1} 4^{d-2i} (20)^i}{2^d} = \sum_{2i+1=0}^{\frac{d}{2}} \binom{d+1}{2i+1} 2^{d-2i} 5^i$$